Feuille d'exercices d'optimisation

1. Optimisation de fonctions, Hessienne, convexité

Exercice 1. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x\,y\,e^{-\pi\left(x^2+y^2\right)}$$

Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature : maximum ou minimum local, point-selle, maximum ou minimum global.

Exercice 2. Soit les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4$, $g(x,y) = (x-y)^2$ et $h = f - 2\,g$.

(1) Montrer que les fonctions f et g sont convexes sur $\mathbb{R}^2$, mais que $h = f - 2\,g$ n'est ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}^2$.
(2) La fonction h admet-elle un minimum ou un maximum sur $\mathbb{R}^2$?
(3) Déterminer les points critiques de h, et préciser leur nature.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^4 - 2\,x^2\,y + 2\,y^2 - 2\,y\,z + 2\,z^2 - 4\,z + 5$.

(1) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$
(2) Montrer que l'expression $f(x,y,z)$ peut s'écrire sous forme d'une somme de carrés.
(3) En déduire les extrema de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y,z) = xy + yz + zx$. Trouver la valeur maximale et la valeur minimale de f sur $B_1 := \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\ \}$, après avoir démontré qu'elles existent.

Exercice 5. Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble

$$T := \left\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\ \right\}.$$

Soit f la fonction donnée par $f(x,y) = -x - 2y - 2xy + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

(1) f est-elle convexe ? concave ?
(2) Démontrer que tout minimum ou maximum local de f sur T se trouve sur la frontière de T.
(3) Démontrer que f admet bien un minimum et un maximum sur T.
(4) Trouver le minimum et le maximum de f sur T.

Exercice 6. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= x^3 + 3\,x\,y^2 - 15\,x - 12\,y\\
f_2(x,y) &= 3\,x^3 + x\,y^2 - 3\,a\,x\,y\\
f_3(x,y) &= x^4 + y^3/3 - 4\,y - 2\\
f_4(x,y) &= x^3 + x\,y^2 - x^2\,y - y^3
\end{aligned}$$

Pour chaque fonction, montrer que les extrema locaux ne sont pas globaux.

Exercice 7. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils convexes ?

$$\begin{aligned}
A_1 &= \Big\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\ \Big\}\\
A_2 &= \Big\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - x + y + 1/4 < 0\ \Big\}\\
A_3 &= \Big\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y + 1 < 0 \text{ ou } y \geq 0\ \Big\}\\
A_4 &= \Big\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 < 0 \text{ et } -2 < x + y \leq 2\ \Big\}
\end{aligned}$$

Exercice 8. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble donné par

$$C := \Big\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \big(x^2 - 1\big)^2 + y^2 \leq 4\ \Big\}.$$

(1) Dessiner l'ensemble C.
(2) S'agit-il d'un ensemble compact ? convexe ?
(3) Considérer la fonction f donnée par $f(x,y) = xy$. Admet-elle un minimum et un maximum sur C ?
(4) Calculer $\inf\{\ f(x,y) : (x,y) \in C\ \}$ et $\sup\{\ f(x,y) : (x,y) \in C\ \}$.

Exercice 9. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble donné par

$$C := \Big\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \big(x^2 - 1\big)^2 + |y| \leq 4\ \Big\}.$$

(1) Dessiner l'ensemble C.
(2) S'agit-il d'un ensemble compact ? S'agit-il d'un ensemble convexe ?
(3) Considérer la fonction f donnée par $f(x,y) = x^2 + y$. Admet-elle un minimum et un maximum sur C ?
(4) Calculer $\inf\{\ f(x,y) : (x,y) \in C\ \}$ et $\sup\{\ f(x,y) : (x,y) \in C\ \}$.

Exercice 10. Optimiser les fonctions suivantes sur leurs domaines :

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^4 + 2\,y^2 + 3\,z^2 - y\,z - 23\,y + 4\,x - 5\\
g(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \ln\left(\frac{1}{x_j}\right)\\
h(x_1,\dots,x_n) &= \prod_{j=1}^{n} x_j^{x_j}
\end{aligned}$$

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement convexe, $c \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Sous la contrainte $\sum_{j=1}^{n} x_j = c$, trouver l'infimum et le supremum de

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j).$$

2. Algorithmes d'optimisation et vitesse de convergence

Exercice 12 (Dichotomie)**.** Soit $f \in C^1(]a,b[,\mathbb{R})$ qui ne possède qu'un seul optimum.

(1) Montrer qu'il existe $(a_0, b_0) \in]a,b[^2$ tels que $a_0 < b_0$ et $f'(a_0)$ et $f'(b_0)$ sont de signes différents.

(2) On suppose que $f'(a_0) < 0 < f'(b_0)$ et que l'optimum est le seul point critique et on effectue l'algorithme par récurrence suivant. Pour tout $n \geq 0$, on définit $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, puis on pose

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (a_n, c_n) & \text{si } f'(c_n) > 0 \\ (c_n, b_n) & \text{si } f'(c_n) < 0 \\ (c_n, c_n) & \text{si } f'(c_n) = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'algorithme converge vers le minimum global de f.

(3) Calculer la vitesse de convergence de l'algorithme.

(4) Proposer un algorithme dans le cas où $f'(b_0) < 0 < f'(a_0)$.

Exercice 13 (Algorithme de la section dorée)**.** Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ dont le minimum est le seul extremum local dans $]a,b[$. On définit pour $n = 0$, $I_n = [a,b]$. On choisit ensuite $\tau \in]0,1[$ et on effectue l'algorithme suivant.

On définit $c = a + \tau(b-a)$ puis $d = c + \tau(b-c)$. Si $f(c) < f(d)$, on définit $I_{n+1} = [a,d]$, sinon on définit $I_{n+1} = [c,b]$. On recommence alors l'algorithme sur I_{n+1}.

(1) Pour optimiser l'algorithme, on fait en sorte que les deux possibilités d'intervalle à chaque pas sont de même taille. Trouver alors la valeur de τ.

(2) Montrer que l'algorithme converge vers le minimum de f et calculer sa vitesse de convergence.

Exercice 14. Soit $c > 0$ et $B_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^d, |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 \leq 1 \right\}$. Calculer le vitesse de convergence de l'algorithme de gradient à pas fixe pour trouver le minimum de la fonction $f : B_1 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^{2+c}$ avec un pas $\alpha < 1/(2+c)$. *On pourra regarder la suite $1/\left|x^{(n)}\right|^c$ où $x^{(n)}$ est la n-ième valeur donnée par l'algorithme.*

3. Projection

Exercice 15. Considérer l'ensemble $A = \overline{B(a,2)} \cap \overline{B(b,2)} \cap \overline{B(c,2)} \subset \mathbb{R}^2$, où $a = (0,0)$, $b = (1, \sqrt{3})$ et $c = (-1, \sqrt{3})$.

(1) Prouver que A est compact et convexe.

(2) Donner une expression pour la projection sur le convexe A, et dessiner comment cette projection agit sur les différents points du plan.

Exercice 16. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble fermé. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on définit $d(x, K) = \inf \{ |x - y| : y \in K \}$.

(1) La borne inférieure dans la définition de $d(x, K)$ est-elle atteinte ?
(2) Donner un exemple d'ensemble K et de point x telle que cette borne est atteinte mais en plusieurs points $y \in K$.
(3) La fonction $x \mapsto d(x, K)$ est-elle continue ?
(4) Donner un exemple où la fonction $x \mapsto d(x, K)$ n'est pas convexe.
(5) Peut-on dire qu'elle est convexe, si on rajoute l'hypothèse que K est convexe ?

Exercice 17. Considérer les ensembles

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 1 \right\} \quad \text{et} \quad B = \overline{B_1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

(1) Dessiner A, B et $A \cap B$. A et B sont-ils convexes ?
(2) Démontrer que l'intersection de deux ensembles convexes est toujours convexe.
(3) Écrire une formule pour la projection sur $A \cap B$, du type $P_{A\cap B}(x, y) = \dots$, en distinguant éventuellement des cas (il suffit de la justifier avec un dessin).
(4) Lesquelles des relations suivantes sont-elles vraies ?

$$P_{A\cap B} = P_A \circ P_B, \quad P_A \circ P_B = P_B \circ P_A, \quad P_{A\cap B} = P_{A\cap B} \circ P_B.$$

Exercice 18. Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ le polyèdre convexe donné par

$$K = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 2 \right\}.$$

Trouver les sommets de K et écrire une formule (en distinguant éventuellement plusieurs cas) pour la projection P_K sur K.

4. Transformée de Fenchel et sous-différentiel

Exercice 19. Soit $a > 0$, $p \geq 1$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = a\,|x| + \frac{|x|^p}{p}$$

où $|x|$ désigne la norme euclidienne du vecteur $x \in \mathbb{R}^d$.

(1) La fonction f est-elle convexe ?
(2) Calculer f^* et f^{**}. On pourra commencer par regarder le cas de la dimension $d = 1$.
(3) Calculer ∂f.

Exercice 20. Calculer le sous-différentiel de la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4} + \sqrt{x^4 + y^2}$.

5. Choix d'algorithme

Exercice 21. Soit $B := \{ x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_3 \leq 1 \}$ la boule unité pour la norme ℓ^3 définie pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ par $\|x\|_3 = \left(|x_1|^3 + \dots + |x_d|^3\right)^{1/3}$. Décrire de manière détaillée et explicite au moins une méthode numérique pour calculer la projection sur B et justifier sa convergence. Pourquoi ne serait-il pas raisonnable *du tout* de considérer un algorithme de gradient projeté pour répondre à la question précédente ?