Dynamique de systèmes à grand nombre de particules et systèmes dynamiques

Laurent Lafleche

Sous la direction de François Golse et Stéphane Mischler

Soutenance de thèse – 28 Juin 2019

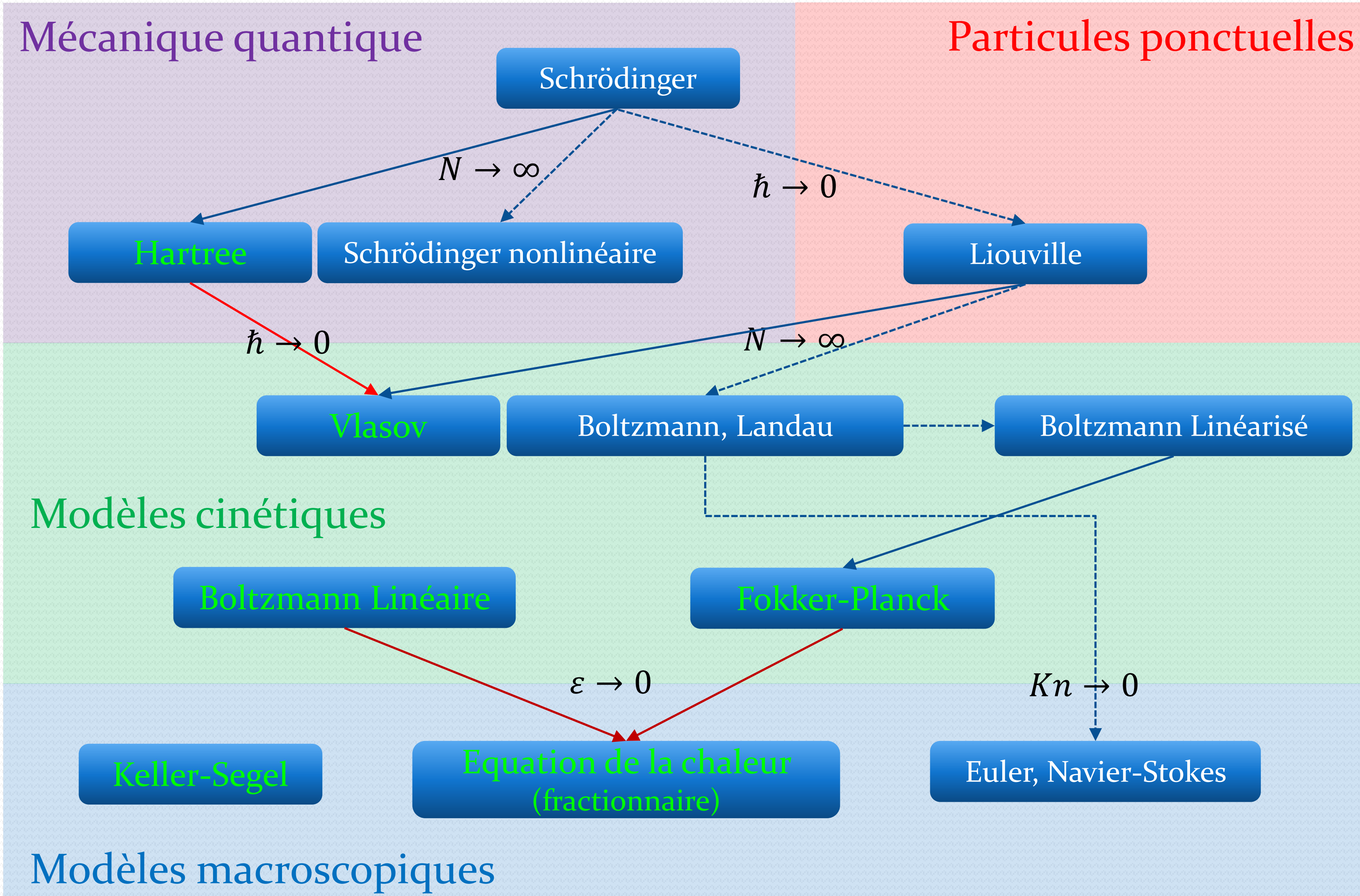
- Introduction
  - Différentes échelles
  - Équations étudiées
  - Principaux résultats
- I) Limite semi-classique
  - Formalisme cinétique
  - Résultats en dimension 3
- II) Retour vers l'équilibre
  - Taux de convergence
  - Deux approches
- III) Hypocoercivité
  - Limite de diffusion fractionnaire
  - Comportement asymptotique
  - Stratégie

Introduction

- Système de particules en interaction
  - $\begin{cases} \dot{X}_i = V_i \\ \dot{V}_i = E_i(X,V) \end{cases} \qquad i \in \{1, \dots, N\}$
  - Exemples :
    - Force de friction : $E_i(V) \sim -|V_i|^{\beta} V_i$
    - Force d'interaction entre particules : $E_i(X) = -\nabla W_i(X)$ avec
$$W_i(X) = \sum_{j=1}^{N} K(X_i - X_j)$$
    - Interaction Coulombienne : $K(x) = \pm \frac{1}{|x|}$

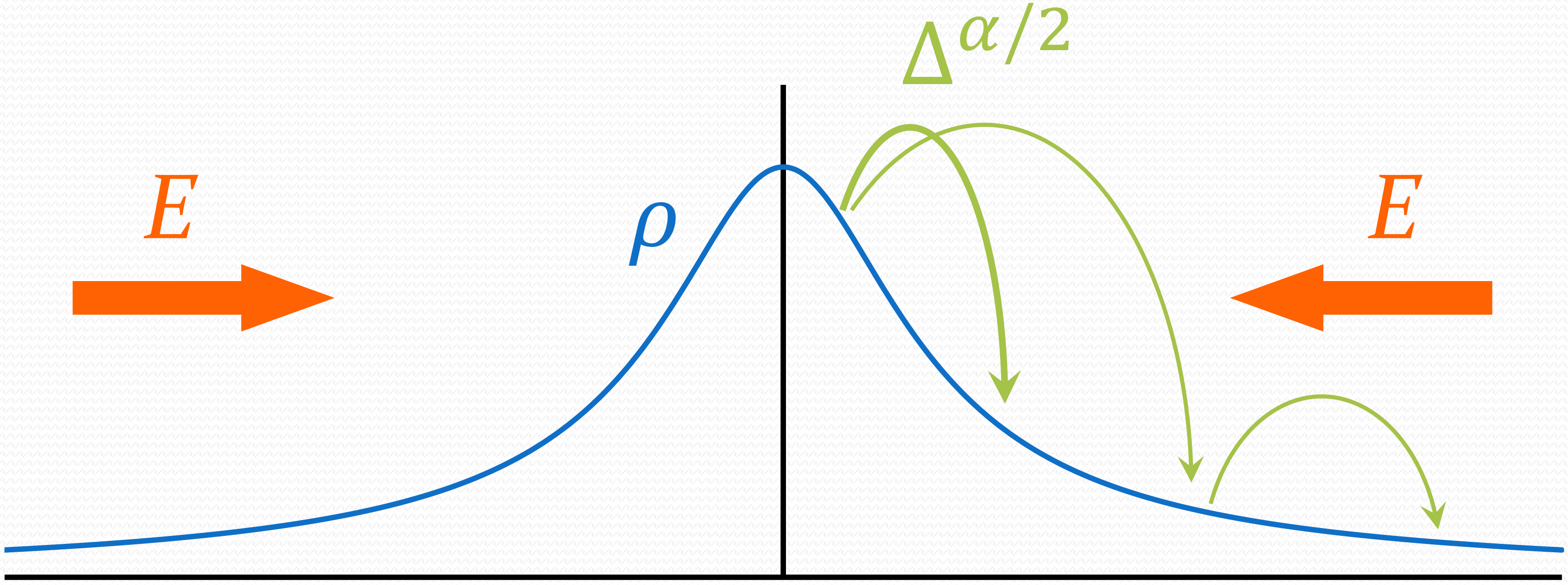
- Densités de particules
$$L^p(m) = \left\{\rho : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}, \int |\rho|^p m < \infty\right\}$$

Différentes échelles



Équations macroscopiques

- Équations pour la densité spatiale de particules $\rho = \rho(t, x)$
$$\partial_t \rho = \Delta^{\alpha/2}\rho - \nabla \cdot (E\rho)$$
    - Fokker-Planck fractionnaire avec confinement
    $$E(x) = -\langle x \rangle^{\beta} x$$
    - Équation de Keller-Segel fractionnaire
    $$E(x) = -\int \nabla K(x-y)\, \rho(y)\, \mathrm{d}y = -\nabla K * \rho$$
- Laplacien fractionnaire
$$\Delta^{\alpha/2}\rho = \int \frac{\rho(y) - \rho(x)}{|y-x|^{-(d+\alpha)}}\, \mathrm{d}y$$
- Équation stochastique d'ordre 1
$$\mathrm{d}X_t = E(X_t)\, \mathrm{d}t + \mathrm{d}\mathcal{L}_t^{\alpha}$$



$\Delta^{\alpha/2}$
E
ρ
E

Théorie cinétique

- Équation pour la distribution de particules dans l'espace des phases $f = f(t, x, v)$

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla W \cdot \nabla_v f = \mathrm{L} f$$

  - Équation de Vlasov (avec la densité spatiale $\rho(x) = \int f \mathrm{d}v$)

$$W = \int K(x-y)\,\rho(y)\,dy = K * \rho$$

  - Équation de Fokker-Planck (ou sa version fractionnaire)

$$\mathrm{L}_{\mathrm{FP}} f = \nabla_v \cdot \left(F\,\nabla_v (f F^{-1})\right) = \Delta_v f - \nabla_v \cdot (E(v) f)$$

  - Équation de Boltzmann linéaire

$$\mathrm{L}_B f = \int b(v, v')\,(f' F - f F')\,\mathrm{d}v' = B(f) - C\,\langle v \rangle^{\beta} f$$

Mécanique quantique

- Fonction d'onde $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$
  - $\begin{cases} \rho(x) = |\psi(x)|^2 \\ \tilde{\rho}(v) = \left|\hat{\psi}(v)\right|^2 \end{cases}$

- Plus généralement, $\boldsymbol{\rho}$ opérateur compact sur L^2

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

  - On définit alors la densité spatiale par $\rho(x) = \sum |\lambda_j|^2$

- Équation de Hartree

$$i\hbar\, \partial_t \boldsymbol{\rho} = [H, \boldsymbol{\rho}]$$

  - Moment $\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla$ et Hamiltonien $H = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2} + W$ avec $W = K * \rho$

Principaux résultats

- Du quantique vers le cinétique
  - Limite semi-classique quantitative de l'équation de Hartree vers l'équation de Vlasov en terme de pseudo-distances de Wasserstein semi-classique
  - Propagation de moments et estimées dispersives semi-classiques
- Comportement en temps long
  - Taux de retour vers l'équilibre pour l'équation d'advection-diffusion fractionnaire
  - Taux d'étalement pour les équations de Fokker-Planck, Fokker-Planck fractionnaire et Boltzmann Linéaire (avec E. Bouin, J. Dolbeault, C. Schmeiser, C. Mouhot)
- Équation de Keller-Segel (avec S. Salem)
  - Unicité par stabilité dans les distances de Wasserstein
  - Effondement en temps fini ou existence globale

Limite semi-classique

De l'équation de Hartree vers l'équation de Vlasov

Formalisme cinétique

- Version semi-classique des normes de Lebesgue $L^p_{x,v}$

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^p} := h^{-\frac{d}{p'}}\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}^p)^{\frac{1}{\mathrm{p}}}$$

  - Vérifient des inégalités d'interpolation cinétique (généralisation de l'inégalité de Lieb-Thirring)

$$\|\rho\|_{L^p} \leq C\,\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}^r}^{\theta}\,\mathrm{Tr}(|\mathbf{p}|^{2\mathrm{n}}\boldsymbol{\rho})^{1-\theta}$$

- Pseudo distances de Wasserstein semi-classiques
  - Couplage semi-classique $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{C}(f,\boldsymbol{\rho}) \subset P\left(\mathbb{R}^{2d},\mathcal{P}\right)$
    - $\mathrm{Tr}\big(\boldsymbol{\gamma}(z)\big) = f(z)$
    - $\int_{\mathbb{R}^{2d}} \boldsymbol{\gamma}(z)\,\mathrm{dz} = \boldsymbol{\rho}$
  - $W_{2,\hbar}(f,\boldsymbol{\rho}) = \min\limits_{\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{C}(f,\boldsymbol{\rho})} \int \mathrm{Tr}\Big(\big(|x-y|^2 + |v-\mathbf{p}|^2\big)\,\boldsymbol{\gamma}(z)\Big)\,\mathrm{dz}$

- Liens avec les distances de Wasserstein classiques (Golse & Paul '17)

Résultats en dimension 3

Théorème (LL '18)

Soit $K(x) = \pm\frac{1}{|x|^a}$ avec $a \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$ et f_t et $\boldsymbol{\rho}_t$ les solutions respectives des équations de Vlasov et Hartree de conditions initiales vérifiant

$$(1+|v|^n)\, f_0 \ \in\ L^1 \cap L^\infty$$
$$(1+|\boldsymbol{p}|^n)\, \boldsymbol{\rho}_0 \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$$

Alors il existe $T > 0$ tel que

$$\rho \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T], L^\infty)$$

Et les solutions sont proches au sens suivant

$$W_{2,\hbar}\,(f_t, \boldsymbol{\rho}_t) \leq W_{2,\hbar}(f_0, \boldsymbol{\rho}_0)^{c_1(t)}\, e^{c_2(t)} \ + \ C\sqrt{\hbar}$$

- *Schéma de la preuve*
  - Propagation de normes de Lebesgue à poids ⇒ régularité de E (Cas Classique Lions & Perthame '91)
  - Régularité de E ⇒ stabilité pour les distances de Wasserstein (Cas ∇K Lipschitz Golse & Paul '17)

Retour vers l’équilibre

Pour Fokker-Planck fractionnaire

Taux de convergence

Théorème (LL '18)

Il existe $k > 0$ et $p_\beta > 0$ tel que pour tout $p \in \left[1, p_\beta\right)$, si $f_t \coloneqq f(t,x)$ une solution de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire avec confinement de condition initiale $f_0 \in L^p\left(\langle x\rangle^k \,\mathrm{d}x\right)$, alors

- si $\beta \geq 0$,
  $$\|f_t - F\|^p_{L^p(\langle x\rangle^k \,\mathrm{d}x)} \lesssim \; e^{-\lambda t} \quad \|f_0 - F\|^p_{L^p\left(\langle x\rangle^k \,\mathrm{d}x\right)}$$
- si $\beta \in (-\alpha, 0)$, alors pour tout $k_0 \in (0,k)$
  $$\|f_t - F\|^p_{L^p(\langle x\rangle^{k_0} \,\mathrm{d}x)} \lesssim \langle t\rangle^{-\frac{k-k_0}{|\beta|}} \|f_0 - F\|^p_{L^p\left(\langle x\rangle^k \,\mathrm{d}x\right)}$$

- Cas classique
  - voir par exemple Mischler & Mouhot '16, Kavian & Mischler '15
- Cas $\beta = 0$
  - voir par exemple Biler & Karch '03, Gentil & Imbert '08, F.-Y. Wang '14, Tristani '15
- Difficulté
  - on ne connait pas la régularité des solutions et de l'état stationnaire

Deux approches

- Effet du confinement: condition de Lyapunov
  - $\mathrm{L}^*\left(\langle x\rangle^k\right) \leq b - a\,\langle x\rangle^{k+\beta}$
- Inégalité de Poincaré: Nécessite de connaître des bornes sur F
- Positivité:
  - Isolement des grands sauts: on pose $\mathrm{A}f := \frac{1_{\{|x|>R\}}}{|x|^{d+\alpha}} * f$ et
$$\Delta^{\alpha/2} = \Delta_{\mathrm{R}}^{\alpha/2} + A\,f - C\,f$$
  - Formule de Duhamel avec $\mathrm{B} := \mathrm{L} - \mathrm{A}$
$$e^{t\mathrm{L}} = e^{t\mathrm{B}} + e^{t\mathrm{L}} \star \mathrm{A}\,e^{t\mathrm{B}}$$
  - Résultat
$$e^{t\mathrm{L}}f \gtrsim \frac{te^{-\lambda t}}{\langle x\rangle^{d+\alpha+\beta+\epsilon}} \int_{B_R} f$$
  - Puis approche duale (Harris, Meyn & Tweedie, Hairer & Mattingly …)

Hypocoercivité

Comportement en temps long d'équations cinétiques

Limite de diffusion fractionnaire

- Équilibre thermodynamique local $F(v) = \langle v \rangle^{-(d+\gamma)}$
  - $\mathrm{L} = \mathrm{L_B}$: $\beta < \gamma$
  - $\mathrm{L} = \mathrm{L_{FP}}$: $\beta = -2$
  - $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathrm{FP},\boldsymbol{a}}$: $\beta = \gamma - \boldsymbol{a}$

- Changement d'échelle

$$\varepsilon^{\alpha}\, \partial_t f + \varepsilon\, v \cdot \nabla_x f = \mathrm{L} f$$

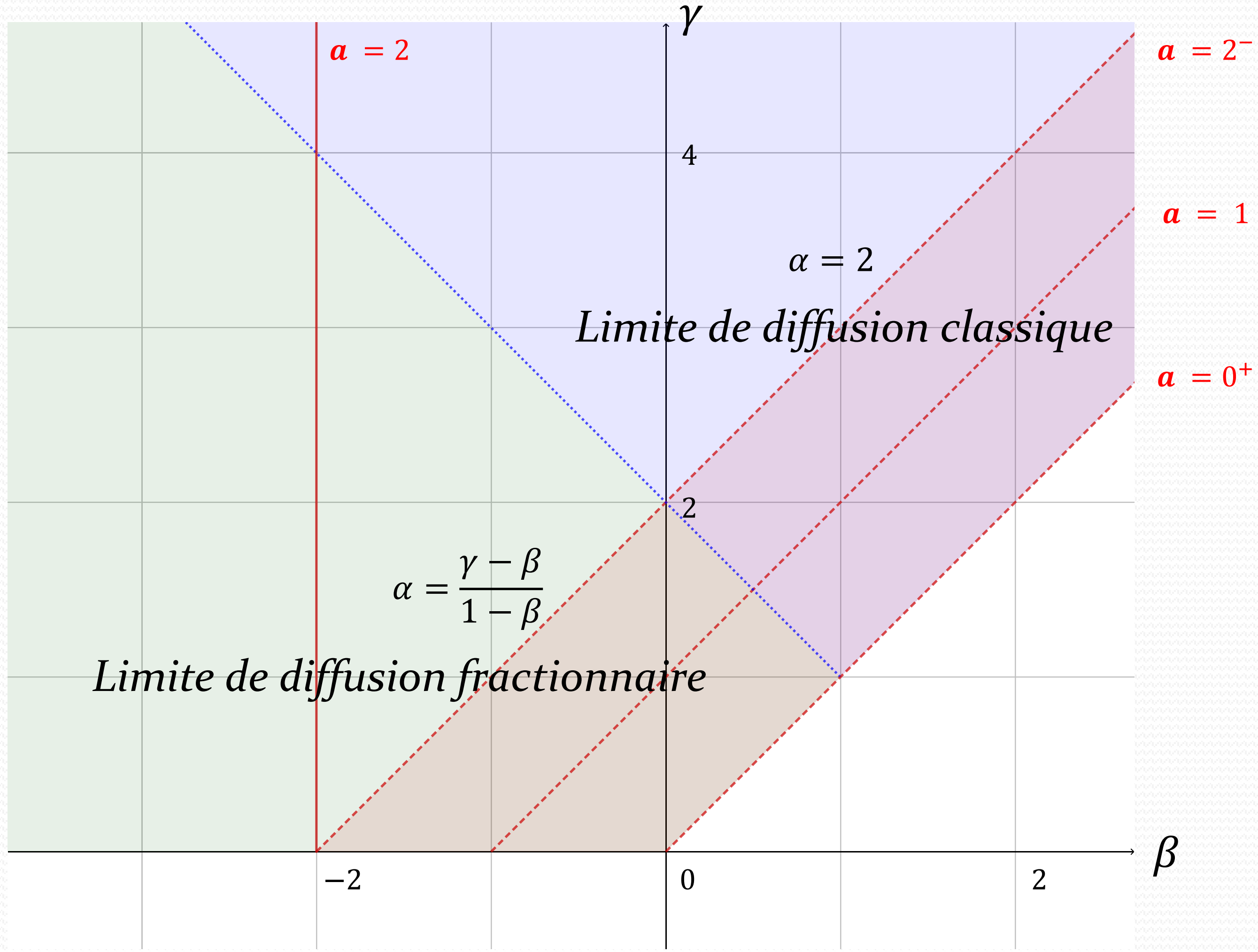
  - avec $\alpha = \frac{\gamma-\beta}{1-\beta}$ si $\gamma + \beta < 2$ et $\alpha = 2$ si $\gamma + \beta > 2$

- Limite diffusive

$$\partial_t \rho = \kappa\, \Delta^{\alpha/2} \rho$$

  - $\mathrm{L} = \mathrm{L_B}$ Degond et al. '00 ($\alpha = 2$), Mellet et al. '11
  - $\mathrm{L} = \mathrm{L_{FP}}$ Lebeau & Puel '17 ($d = 1$), Fournier & Tardif '18
  - $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathrm{FP},\boldsymbol{a}}$ Aceves-Sanchez & Cesbron '18 ($\beta = 0$)

Limite de diffusion fractionnaire



Comportement asymptotique

Théorème (Bouin, Dolbeault, LL, Mouhot, Schmeiser '19)

Soit f une solution de

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \mathrm{L} f$$

avec $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathrm{B}}$, $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathrm{FP}}$ ou $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathrm{FP},\boldsymbol{\alpha}}$. Alors sous certaines conditions sur L

- Si $\beta \in (0, \gamma)$

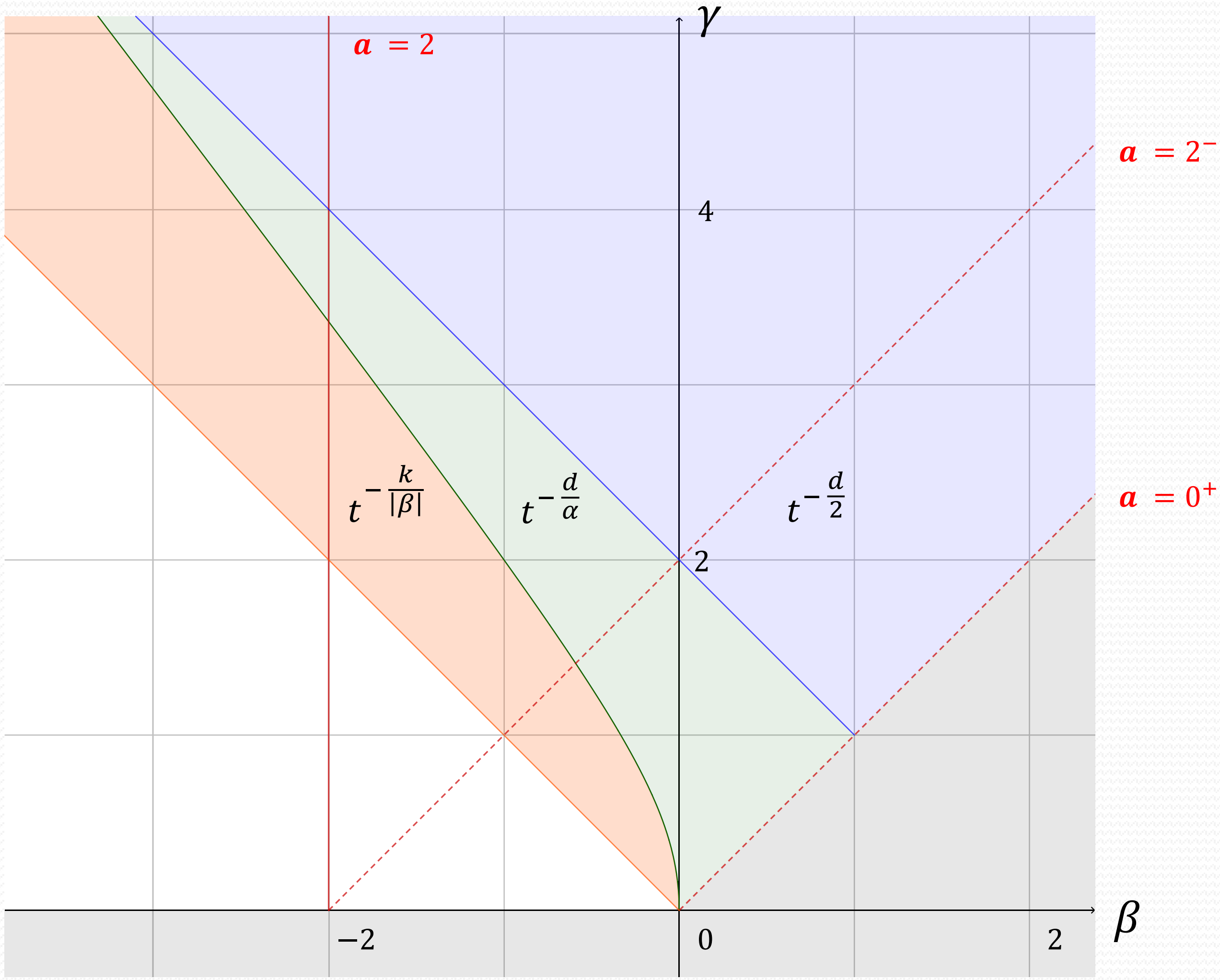
$$\|f_t\|^2_{L^2(\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu)} \lesssim \|f_0\|^2_{L^1(\mathrm{d}x\mathrm{d}v)\,\cap\, L^2(\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu)} \langle t \rangle^{-\frac{d}{\alpha}}$$

- Si $\beta \in (-\gamma, 0)$

$$\|f_t\|^2_{L^2(\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu)} \lesssim \|f_0\|^2_{L^1(\mathrm{d}x\mathrm{d}v)\,\cap\, L^2(\langle v \rangle^k \mathrm{d}x\mathrm{d}\mu)} \langle t \rangle^{-\min\left(\frac{d}{\alpha}, \frac{k}{|\beta|}\right)}$$

- Le cas de l'équation de la chaleur fractionnaire
  - Inégalité de Nash fractionnaire $\|\rho\|_{L^2} \leq C\, \|\rho\|_{L^1}^{\frac{\alpha}{d+\alpha}} \left\|\nabla^{\alpha/2}\rho\right\|_{L^2}^{\frac{d}{d+\alpha}}$
  - Taux de décroissance algébrique $\|\rho_t\|^2_{L^2} \leq C\, \|\rho_0\|^2_{L^1 \cap L^2} \langle t \rangle^{-\,d/\alpha}$

Comportement asymptotique



Strategie

- Estimées mode par mode
  - Transformée de Fourier par rapport à la variable x : $\hat{f} = \hat{f}(\xi, v)$
  - $\partial_t \hat{f} + \mathrm{T}\hat{f} = \mathrm{L}\hat{f}$ avec $\mathrm{T} = i\, v \cdot \xi$
  - Entropie pour chaque mode ξ définie pour $\delta \in (0,1)$ par

$$\mathrm{H}_\xi(f) := \|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathrm{d}\mu)} + \delta \left\langle \mathrm{A}_\xi \hat{f}, \hat{f} \right\rangle_{L^2(\mathrm{d}\mu)}$$

  - Entropie globale

$$\mathrm{H}(f) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{H}_\xi(f)\, \mathrm{d}\xi$$

- Cas classique (Dolbeault et al. ’15, Bouin et al. ’17)

$$\mathrm{A} = (1 + |\mathrm{T}\Pi|^2)^{-1}(\mathrm{T}\Pi)^*$$

  - avec $\Pi f = F(v) \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}v$

Entropie fractionnaire

- Nouvel operateur A

$$\mathrm{A}_\xi := \psi\,(\mathrm{T\Pi})^*\,\varphi_\beta$$

  - avec

$$\varphi_b(\xi,v) := \frac{\langle v\rangle^{-b}}{1+\langle v\rangle^{2|1-b|}|\xi|^2}$$

$$\psi(\xi,v) := \varphi_0/\|\varphi_0\|_{L^2(\mathrm{d}v)}$$

- Mélange entre l'entropie classique qui peut s'écrire
  - $\mathrm{A}_\xi = (\mathrm{T\Pi})^*\,\varphi_0$
- Et le symbole qui apparaît dans la preuve de la limite de diffusion fractionnaire par Mellet et al. '11
  - $\int a(\xi,v)\,F(v)\,\mathrm{d}v$ avec
  - $a(\xi,v) = \frac{\langle v\rangle^{\beta}}{\langle v\rangle^{\beta} - i\,v\cdot\xi} = \frac{\langle v\rangle^{-\beta}(1+i\,v\cdot\xi\,\langle v\rangle^{-\beta})}{1+\langle v\rangle^{-\beta}|v\cdot\xi|^2}$

Idée de la preuve

- Propagation de normes de Lebesgue à poids: $e^{t\mathrm{L}}$ borné dans $L^2\left(\langle v\rangle^k \mathrm{d}\mu\right)$
  - $\left\|F^{-1}e^{t\mathrm{L}}\right\|_{L^1\left(F\langle v\rangle^k \mathrm{d}v\right)\to L^1\left(F\langle v\rangle^k \mathrm{d}v\right)} \leq 1$
  - $\left\|F^{-1}e^{t\mathrm{L}}\right\|_{L^\infty(\mathrm{d}v)\to L^\infty(\mathrm{d}v)} \leq 1$

- On estime la dérivée de l'entropie

$$\frac{\mathrm{dH}_\xi}{\mathrm{d}t} = -\left\langle -\mathrm{L}\hat{f},\hat{f}\right\rangle - \boldsymbol{\delta}\left\langle A_\xi \mathrm{T}\Pi\hat{f},\Pi\hat{f}\right\rangle - \boldsymbol{\delta}\left\langle A_\xi \mathrm{T}\Pi\hat{f},(1-\Pi)\hat{f}\right\rangle$$
$$+\boldsymbol{\delta}\left\langle A_\xi(1-\Pi)\hat{f},(\mathrm{L}-\mathrm{T})(1-\Pi)\hat{f}\right\rangle + \boldsymbol{\delta}\left\langle A_\xi(\mathrm{L}-\mathrm{T})(1-\Pi)\hat{f},\hat{f}\right\rangle$$

  - Inégalité de Poincaré à poids + termes micro-macro bornés

$$\frac{\mathrm{dH}_\xi}{\mathrm{d}t} \lesssim -\delta\left(\left\|(1-\Pi)\hat{f}\right\|^2_{L^2(\langle v\rangle^\beta \mathrm{d}\mu)} - \frac{|\xi|^\alpha}{\langle\xi\rangle^\alpha}\left\|\Pi\hat{f}\right\|^2_{L^2(\mathrm{d}\mu)}\right)$$

  - Inégalité de Nash et interpolation entre espaces à poids

$$\mathrm{H}'(\mathrm{t}) \lesssim -\,\delta\, H(t)^{1+\frac{1}{\tau}}$$

Merci pour votre attention !